

Методические указания к решению контрольных работ по сопротивлению материалов для студентов заочного факультета

Исходные данные выбираются по номеру зачетной книжки

шифр

а б в г д е

Задача №1

Стальной стержень ($E=2 \cdot 10^5$ МПа) находится под действием продольной силы P . Построить эпюры продольных сил N , напряжений S , перемещений D . Проверить прочность стержня.

Исходные данные:

схема I;

$$F=12 \text{ см}^2; a=2,9 \text{ м}; b=2,1 \text{ м}; c=1,1 \text{ м}; P=1900 \cdot 10^2 \text{ Н}=190 \text{ кН}, E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

Решение

Уравнение равновесия: $\sum Y_i = 0$: $R_A + R_D - P = 0$

Степень статической неопределимости $s = m - n = 2 - 1$, система один раз статически неопределима.

Для заделанного обоими концами стержня полное абсолютное удлинение должно быть равным нулю. Уравнение совместности деформаций

$$Dl = Dl_1 + Dl_2 + Dl_3 = 0$$

Определим продольные силы на каждом участке нагружения, пользуясь методом сечений.

I участок:	$0 \leq z \leq c$	$N_1 = -R_D$,
II участок:	$c \leq z \leq c + b$	$N_2 = -R_D$,
III участок:	$c + b \leq z \leq c + b + a$	$N_3 = -R_D + P$

Тогда

$$Dl_1 = \frac{N_1 l_1}{E F_1} = \frac{-R_D \cdot c}{E \cdot F};$$

$$Dl_2 = \frac{N_2 l_2}{E F_2} = \frac{-R_D \cdot b}{E \cdot 2F};$$

$$Dl_3 = \frac{N_3 l_3}{E F_3} = \frac{(-R_D + P) \cdot a}{E \cdot F};$$

$$\text{Тогда } \frac{-R_D \cdot c}{E \cdot F} + \frac{-R_D \cdot b}{E \cdot 2F} + \frac{(-R_D + P) \cdot a}{E \cdot F} = 0$$

Разрешая это уравнение относительно R_D , получим

$$R_D = \frac{2aP}{2a + b + 2c} = 108,04 \text{ кН}.$$

Продольные усилия на участках нагружения статически неопределимого бруса

$$N_1 = -109,11 \text{ кН}$$

$$N_2 = -109,11 \text{ кН}$$

$$N_3 = 80,89 \text{ кН}$$

Напряжения в поперечных сечениях статически неопределимого бруса

$$S_1 = \frac{N_1}{F_1} = -90,92 \text{ МПа};$$

$$s_2 = \frac{N_2}{F_2} = -45,46 \text{ МПа};$$

$$s_3 = \frac{N_3}{F_3} = 67,41 \text{ МПа};$$

Проверим прочность статически неопределимого стержня:

$s_{\max} = s_1 = 90,92 \text{ МПа} < [s] = 160 \text{ МПа}$; прочность обеспечена.

Удлинения участков стержня

$$Dl_1 = \frac{s_1 c}{E} = -0,500 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$Dl_2 = \frac{s_2 b}{E} = -0,477 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$Dl_3 = \frac{s_3 a}{E} = 0,674 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

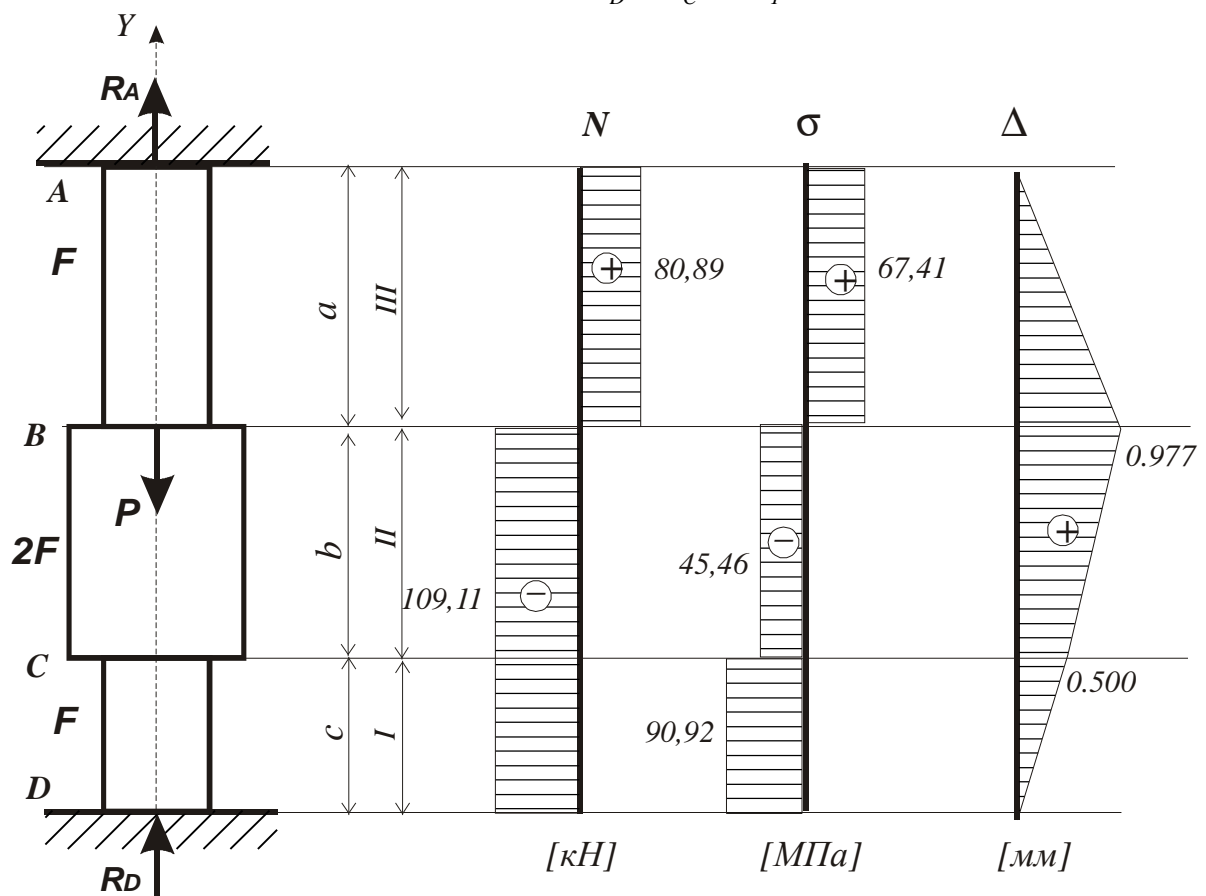
Определим перемещения поперечных сечений, совпадающих с границами участков нагружения:

сечение A (жесткая заделка): $D_A = 0$;

сечение B: $D_B = D_A + Dl_3 = 0,977 \text{ мм}$;

сечение C: $D_C = D_B + Dl_2 = 0,500 \text{ мм}$;

сечение D: $D_D = D_C + Dl_1 = 0$ - жесткая заделка.



Задача №3

Жесткий брус прикреплен к двум стальным стержням с площадью поперечного сечения F , опирающимся на неподвижное основание. К брусу прикреплен средний ступенчатый стальной стержень с зазором $D = b c$. Требуется:

1. установить при какой силе H зазор закроется;
2. найти реакцию основания в нижнем сечении среднего стержня при заданной силе H и построить эпюру продольных сил для среднего стержня;
3. найти усилия и напряжения в крайних стержнях при заданной силе H ;
4. установить, на сколько градусов надо охладить средний стержень, чтобы реакция основания в нижнем сечении среднего стержня при заданной силе H обратилась в нуль.

Исходные данные:

схема II;

$F=12 \text{ см}^2$; $c=1,2 \text{ м}$; $H=140 \text{ кН}$, $b=4 \cdot 10^{-5}$, температурный коэффициент линейного расширения стали $\alpha=125 \cdot 10^{-7}$, $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Решение

1. Определим $H=H_0$, при которой $D_{H_0} = D$,

в этом случае $R=0$, $N_1=N_2=H_0$.

$$D_{H_0} = \frac{H_0 c}{EF} + \left(\frac{H_0 (c/2)}{E2F} + \frac{H_0 (c/2)}{E2F} + \frac{H_0 (c/4)}{EF} \right) = \frac{7}{4} \frac{H_0 c}{EF}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{4} \frac{H_0 c}{EF} = b c \quad \Rightarrow H_0 = \frac{4}{7} b EF$$

Тогда $H_0=5,486 \text{ кН}$.

2. Реакцию основания R определим из уравнения:

$$D_H - D_R = D$$

$$D_H = \frac{7}{4} \frac{H c}{EF}$$

$$D_R = \frac{\frac{R}{2} c}{EF} + \left(\frac{R(c/2)}{EF} + \frac{R(c/2)}{E2F} \right) = \frac{5}{4} \frac{R c}{EF}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{4} \frac{H c}{EF} - \frac{5}{4} \frac{R c}{EF} = b c \quad \Rightarrow R = \frac{7H}{5} - \frac{4bEF}{5} = 1,4(H - H_0)$$

Тогда $R=188,32 \text{ кН}$.

Продольные усилия в среднем стержне

I участок: $0 \leq z \leq 0,25c$

$$N_1 = -R = -188,32 \text{ кН},$$

II участок: $0,25c \leq z \leq 0,5c$

$$N_2 = -R + H = -48,32 \text{ кН},$$

III участок: $0,5c \leq z \leq c$

$$N_3 = -R + 2H = +91,68 \text{ кН}$$

3. Усилия $N_1=N_2=N$ определим из уравнения равновесия верхнего бруса

$$2N - 2H + R = 0 \quad \Rightarrow \quad N = \frac{-R + 2H}{2}$$

Тогда $N=45,84 \text{ кН}$.

Напряжение $\sigma = \frac{N}{F} = 38,20 \text{ МПа}$.

4. При $R=0$ усилия $N=H$.

Dt найдем из уравнения

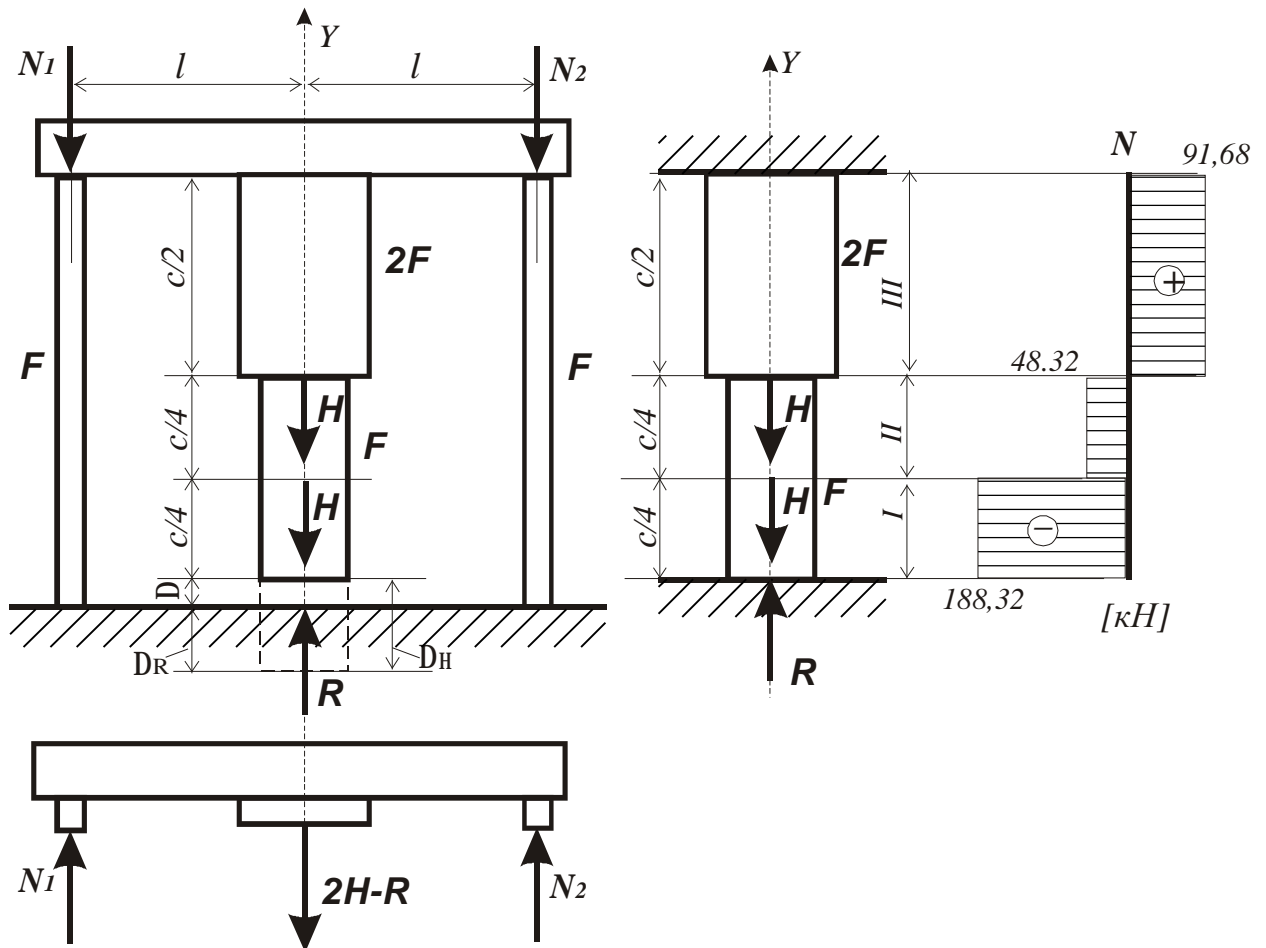
$$D_H - D_t = D$$

$$D_H = \frac{7}{4} \frac{Hc}{EF}, \quad D_t = a Dt c$$

$$\Rightarrow \frac{7}{4} \frac{Hc}{EF} - a Dt c = b c$$

$$\Rightarrow Dt = \frac{1}{a} \left(\frac{7}{4} \frac{H}{EF} - b \right)$$

Тогда $Dt = 78,47^\circ$.



Задача №4

Стальной кубик находится под действием сил, создающих плоское напряженное состояние (одно из трех главных напряжений равно нулю). Требуется найти:

1. главные напряжения и направление главных площадок;
2. максимальные касательные напряжения, равные наибольшей полуразности главных напряжений;
3. относительные деформации e_x, e_y, e_z ;
4. относительное изменение объема;
5. удельную потенциальную энергию деформаций.

Исходные данные:

схема III;

$s_x = 100 \text{ МПа}$; $s_y = 20 \text{ МПа}$; $t_x = 30 \text{ МПа}$; коэффициент Пуассона и модуль упругости стали $\mu = 0,3$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$

Решение

1. Определим главные напряжения s_{max} , s_{min} и направление главных площадок, т.е. углы наклона главных площадок к площадкам, на которых действуют заданные напряжения $s_x = +100 \text{ МПа}$, $s_y = -20 \text{ МПа}$.

Учтем, что по закону парности касательные напряжения на взаимно перпендикулярных площадках равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. С учетом правила знаков для касательных напряжений $t_x = +t$, $t_y = -t$ (знак минус показывает, что касательные напряжения стремятся вращать элемент объема против часовой стрелки). Тогда

$$s_1 = s_{max} = \frac{s_x + s_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(s_x - s_y)^2 + 4t^2} = +107,082 \text{ МПа};$$

$$s_2 = 0 ;$$

$$s_3 = s_{min} = \frac{s_x + s_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(s_x - s_y)^2 + 4t^2} = -27,082 \text{ МПа}.$$

Угол, определяющий наклон главных площадок:

$$a_0 = \frac{1}{2} \arctg \frac{2t_x}{s_x - s_y} = 0,232 \text{ рад} = 13,28^\circ.$$

При $a_0 > 0$ исходная площадка поворачивается против часовой стрелки, при $a_0 < 0$ исходная площадка поворачивается по часовой стрелки.

2. Определим экстремальные касательные напряжения, равные полуразности главных напряжений:

$$t_{max} = \frac{s_{max} - s_{min}}{2} = 67,082 \text{ МПа};$$

$$t_{min} = -\frac{s_{max} - s_{min}}{2} = -67,082 \text{ МПа}.$$

Экстремальные касательные напряжения действуют на площадках сдвига, наклоненных к главным площадкам под углом 45° , и направлены от s_{min} к s_{max} .

3. Определим относительные деформации e_x , e_y , e_z по обобщенному закону Гука:

$$e_x = \frac{1}{E} (s_x - \mu(s_y + s_z));$$

$$e_y = \frac{1}{E} (s_y - \mu(s_z + s_x));$$

$$e_z = \frac{1}{E} (s_z - \mu(s_x + s_y)).$$

Учтем, что при плоском напряженном состоянии $s_z = 0$, тогда

$$e_x = \frac{1}{E} (s_x - \mu s_y) = 5,3 \cdot 10^{-4};$$

$$e_y = \frac{1}{E} (s_y - \mu s_x) = -2,5 \cdot 10^{-4};$$

$$e_z = -\frac{\mu}{E} (s_x + s_y) = -1,2 \cdot 10^{-4}$$

4. Определим относительное изменение объема:

$$q = \frac{1-2m}{E}(s_1 + s_2 + s_3) = \frac{1-2m}{E}(s_x + s_y + s_z) = 1,6 \cdot 10^{-4},$$

$$\text{или } q = e_x + e_y + e_z = 1,6 \cdot 10^{-4}.$$

5. Определим удельную потенциальную энергию деформаций. Определим ее составляющие.

Удельная потенциальная энергия изменения объема равна

$$u_o = \frac{1-2m}{6E}(s_1 + s_2 + s_3)^2 = 0,002133.$$

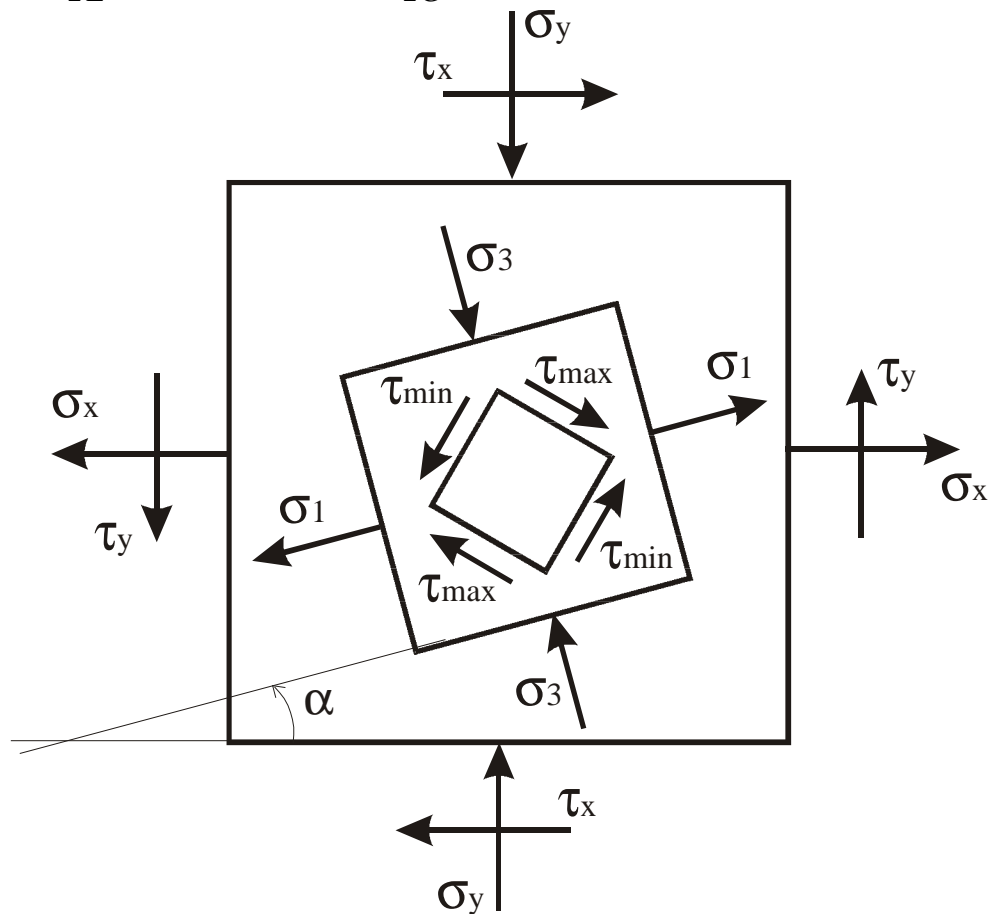
Удельная потенциальная энергия изменения формы равна

$$u_\phi = \frac{1+m}{3E}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - s_1 s_2 - s_1 s_3 - s_2 s_3) = 0,032717.$$

Полная удельная потенциальная энергия деформаций равна

$$u = u_o + u_\phi = \frac{1}{2E}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - 2m(s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3)) = 0,034850,$$

$$\text{или } u = \frac{1}{2E}(s_x^2 + s_y^2 - 2ms_x s_y) + \frac{t_x^2}{2G} = 0,034850.$$



Задача №5

К стальному валу приложены три известных момента: M_1 , M_2 , M_3 . Требуется:

6. установить при каком значении момента X угол поворота правого концевое сечения вала равен нулю;
7. для найденного значения X построить эпюру крутящих моментов;
8. при заданном значении $[t]$ определить диаметр вала из расчета на прочность и округлить его значение до ближайшего, равного: 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 100 мм;
9. построить эпюру углов закручивания;

10. найти наибольший относительный угол закручивания.

Исходные данные:

схема IV;

$a=1,9 \text{ м}; b=1,2 \text{ м}; c=1,4 \text{ м}; M_1=1900 \text{ Нм}; M_2=1200 \text{ Нм}; M_3=1400 \text{ Нм}; [t]=35 \text{ МПа}, G=80000 \text{ МПа}$

Решение

1. Определим крутящие моменты на каждом участке нагружения, пользуясь методом сечений.

I участок: $0 \leq z \leq a$

$$m_1 = -X,$$

II участок: $a \leq z \leq a+c$

$$m_2 = -X - M_3$$

III участок: $a+c \leq z \leq a+c+b$

$$m_3 = -X - M_3 - M_2$$

IV участок: $a+c+b \leq z \leq 2a+c+b$

$$m_4 = -X - M_3 - M_2 + M_1$$

Полный угол закручивания должен быть равным нулю:

$$j = j_1 + j_2 + j_3 + j_4 = 0, \text{ где}$$

$$j_1 = \frac{m_1 a}{G J_p} = \frac{(-X)a}{G J_p};$$

$$j_2 = \frac{m_2 c}{G J_p} = \frac{(-X - M_3)c}{G J_p};$$

$$j_3 = \frac{m_3 b}{G J_p} = \frac{(-X - M_3 - M_2)b}{G J_p};$$

$$j_4 = \frac{m_4 a}{G J_p} = \frac{(-X - M_3 - M_2 + M_1)a}{G J_p};$$

Тогда

$$(-X)a + (-X - M_3)c + (-X - M_3 - M_2)b + (-X - M_3 - M_2 + M_1)a = 0$$

$$X = \frac{M_1 a - M_2(a+b) - M_3(a+b+c)}{2a+b+c}$$

Получим $X = -1001,56 \text{ Нм}$.

2. Крутящие моменты на участках нагружения

I участок:

$$m_1 = 1001,56 \text{ Нм},$$

II участок:

$$m_2 = -398,44 \text{ Нм},$$

III участок:

$$m_3 = -1598,44 \text{ Нм},$$

IV участок:

$$m_4 = 301,56 \text{ Нм}.$$

3. Опасным участком, т.е. участком на котором возникают максимальные касательные напряжения, является третий участок нагружения.

Составим условия прочности для опасного участка вала.

$$t_{\max} = \frac{m_3}{W_p} \leq [t] = 35 \text{ МПа}$$

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} = 0,1963 D^3$$

Определим диаметр D из условия прочности:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{m_3}{[t] \cdot 0,1963}} = 0,0615 \text{ м} = 61,5 \text{ мм.}$$

Принимаем $D=0,07 \text{ м} = 70 \text{ мм}$

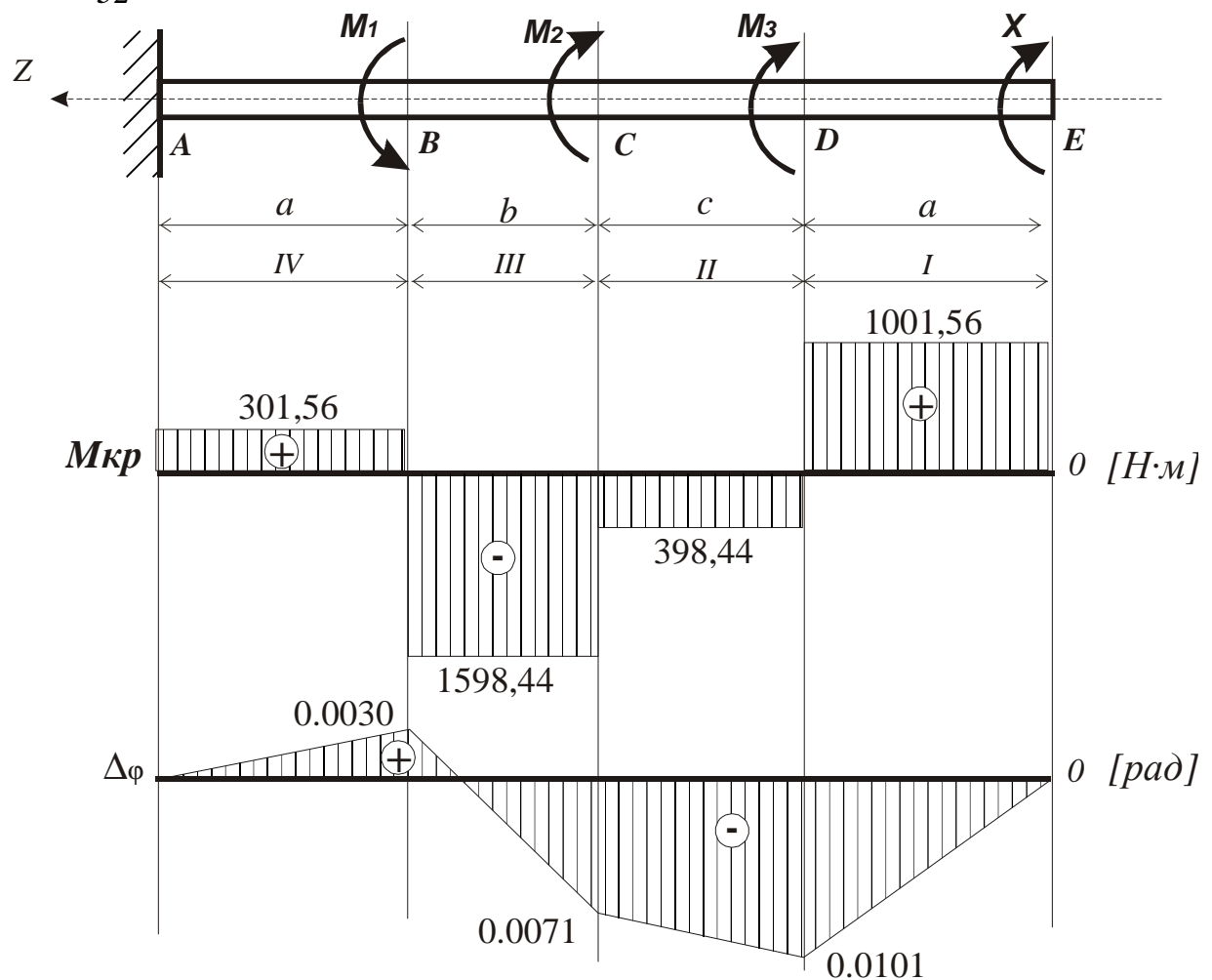
Вычислим геометрические характеристики поперечных сечений вала:

Полярный момент сопротивления сечения:

$$W_p = \frac{\rho D^3}{16} = 0,1963 D^3 = 67,35 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

Полярный момент инерции сечения

$$J_p = \frac{\rho D^4}{32} = 0,0982 D^4 = 235,72 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$



4. Определим абсолютные углы закручивания участков вала:

$$j_1 = \frac{m_1 a}{G J_p} = 0,0101 \text{ рад};$$

$$j_2 = \frac{m_2 c}{G J_p} = -0,0030 \text{ рад};$$

$$j_3 = \frac{m_3 b}{G J_p} = -0,0102 \text{ рад};$$

$$j_4 = \frac{m_4 a}{G J_p} = 0,0030 \text{ рад}$$

Полный угол закручивания вала

$$j = j_1 + j_2 + j_3 + j_4 = 0$$

Определим угловые перемещения поперечных сечений, совпадающих с границами участков нагружения:

сечение A (жесткая заделка): $D_j^A = 0;$

сечение B : $D_j^B = D_j^A + j_4 = 0,0030 \text{ рад};$

сечение C : $D_j^C = D_j^B + j_3 = -0,0071 \text{ рад};$

сечение D : $D_j^D = D_j^C + j_2 = -0,0101 \text{ рад};$

сечение E : $D_j^E = D_j^D + j_1 = 0$

5. Наибольший относительный угол закручивания

$$q_{\max} = \frac{m_{\max}}{G J_p} = \frac{m_3}{G J_p} = 0,0085 \frac{\text{рад}}{\text{м}}$$

Задача №7

Для заданного поперечного сечения, состоящего из швеллера и равнобокого уголка или из двутавра и равнобокого уголка, или из швеллера и двутавра, требуется:

1. определить положение центра тяжести;
2. найти осевые и центробежные моменты инерции относительно центральных осей x_c и y_c ;
3. определить направление главных центральных осей u и v ;
4. найти главные моменты инерции;
5. вычертить сечение в масштабе 1:2.

Исходные данные:

схема V ;

швеллер №20; равнобокий уголок $90 \times 90 \times 6$; двутавр №20а.

Решение

Задано составное сечение, состоящее из равнобокого уголка $90 \times 90 \times 6$ и двутавра №20а. Выбираем следующие данные по таблицам ГОСТа для сортового проката:

Равнобокий уголок $90 \times 90 \times 6$ (ГОСТ 8509-86)

$b=90 \text{ мм}$ - ширина полки, $t=6 \text{ мм}$ - толщина полки, $F=10,61 \text{ см}^2$ - площадь сечения, $z_0=2,43 \text{ см}$ - положение центра тяжести, $J_x=J_y=82,10 \text{ см}^4$ - осевые моменты инерции относительно центральных осей, $J_{xy}=48,10 \text{ см}^4$ - центробежный момент инерции.

Двутавр №20а (ГОСТ 8239-89)

$h=200 \text{ мм}$ - высота, $b=110 \text{ мм}$ - ширина полки, $s=5,2 \text{ мм}$ - толщина стенки, $t=8,6 \text{ мм}$ - толщина полки, $F=28,9 \text{ см}^2$ - площадь сечения, $J_x=2030 \text{ см}^4$, $J_y=155 \text{ см}^4$ - осевые моменты инерции относительно центральных осей двутавра.

Вычерчиваем заданное сечение в масштабе 1:2. Выбираем исходные оси XOY таким образом, чтобы они были параллельны сторонам составного сечения и проходили через центры тяжести двутавра C_1 и уголка C_2 .

Для каждого элемента сечения проведем собственные центральные оси.

Координаты центров тяжести элементов сечения в выбранных осях, их площади и моменты инерции приведены в таблице.

№	Площадь F_i $см^2$	Координаты ц.т.		Моменты инерции		
		x_i	y_i	J_{xi}	J_{yi}	J_{xivi}
		$см$	$см$	$см^4$	$см^4$	$см^4$
1(двутавр)	28,9	3,07	0,0	2030,0	155,0	0,0
2(уголок)	10,61	0,0	12,43	82,10	82,10	48,10
Составное сечение	39,51	2,25	3,34	3311,18	310,24	-248,05

Координаты центров тяжести частей сечения в выбранной системе осей XOY (все размеры взяты в $см$, индекс 1 соответствует двутавру, индекс 2 - уголку)

$$x_1 = 0,5b_1 - z_{02} = 3,07 \text{ см}$$

$$y_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$y_2 = 0,5h_1 + z_{02} = 12,43 \text{ см}$$

Площадь составного сечения

$$F = F_1 + F_2$$

Статические моменты площади определялись:

$$S_x^i = y_i \cdot F_i$$

$$S_y^i = x_i \cdot F_i$$

Координаты центра тяжести составного сечения определены по формулам

$$x_c = \frac{S_y^1 + S_y^2}{F} = \frac{x_1 \cdot F_1 + x_2 \cdot F_2}{F_1 + F_2} = 2,25 \text{ см}$$

$$y_c = \frac{S_x^1 + S_x^2}{F} = \frac{y_1 \cdot F_1 + y_2 \cdot F_2}{F_1 + F_2} = 3,34 \text{ см}$$

Расстояние между соответствующими собственными центральными осями элементов и центральными осями всего составного сечения

$$a_i = y_i - y_c$$

$$b_i = x_i - x_c$$

№	a_i	b_i
	$см$	$см$
1(двутавр)	-3,34	0,82
2(уголок)	9,09	-2,25

Проверка $\frac{|a_1|}{|a_2|} = \frac{|b_1|}{|b_2|} = \frac{F_2}{F_1} = 0,367$

Осевые и центробежный моменты относительно центральных осей X_c , Y_c вычисляются по формулам

$$J_{Xc} = J_{Xc}^1 + J_{Xc}^2 = J_{X1}^1 + a_1^2 F_1 + J_{X2}^2 + a_2^2 F_2 = 3311,18 \text{ см}^4$$

$$J_{Yc} = J_{Yc}^1 + J_{Yc}^2 = J_{Y1}^1 + b_1^2 F_1 + J_{Y2}^2 + b_2^2 F_2 = 310,24 \text{ см}^4$$

$$J_{XcYc} = J_{XcYc}^1 + J_{XcYc}^2 = J_{X1Y1}^1 + a_1 b_1 F_1 + J_{X2Y2}^2 + a_2 b_2 F_2 = -248,05 \text{ см}^4$$

Положение главных центральных осей инерции U, V определяется через угол α , который они составляют с центральными осями X_c, Y_c (положительное значение угла отсчитывается против хода часовой стрелки)

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctg \frac{2J_{X_c Y_c}}{J_{Y_c} - J_{X_c}} = 0,082 \text{ рад} = 4,69^\circ$$

По результатам расчетов нанесем на чертеж: центр тяжести всего сечения; центральные оси; главные центральные оси.

Главные центральные моменты инерции сечения

$$J_U = J_{X_c} \cos^2 \alpha + J_{Y_c} \sin^2 \alpha - J_{X_c Y_c} \sin 2\alpha = 3331,54 \text{ см}^4$$

$$J_V = J_{X_c} \sin^2 \alpha + J_{Y_c} \cos^2 \alpha + J_{X_c Y_c} \sin 2\alpha = 289,88 \text{ см}^4$$

Кроме того, главные центральные моменты инерции сечения могут быть вычислены по формулам:

$$J_{\max} = \frac{J_{X_c} + J_{Y_c}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(J_{X_c} - J_{Y_c})^2 + 4J_{X_c Y_c}^2} = 3331,54 \text{ см}^4$$

$$J_{\min} = \frac{J_{X_c} + J_{Y_c}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(J_{X_c} - J_{Y_c})^2 + 4J_{X_c Y_c}^2} = 289,88 \text{ см}^4$$

Выполним аналитическую проверку.

$$J_{X_c} + J_{Y_c} = J_U + J_V = 3621,42 \text{ см}^4$$

$$J_{UV} = J_{X_c Y_c} \cos 2\alpha - \frac{J_{X_c} - J_{Y_c}}{2} \sin 2\alpha = 0$$

Задача №8

Для заданных двух схем балок требуется написать выражения для каждого участка и построить эпюры Q и M ; подобрать

1. для схемы (а) деревянную балку круглого поперечного сечения при $[S]=8 \text{ МПа}$;
2. для схемы (б) стальную балку двутаврового поперечного сечения при $[S]=180 \text{ МПа}$.

Исходные данные:

схема VI;

$l_1=1,1 \text{ м}; l_2=6 \text{ м}; a_1=9a; a_2=9a; a_3=1a; M=9 \text{ кНм}; P=10 \text{ кН}; q=6 \text{ кН/м}$.

Решение

Схема а

Для консольной балки определим поперечные силы и изгибающие моменты на каждом участке нагружения, рассматривая участки балки от свободного конца к заделке.

I участок: $0 \leq z \leq a = 0,11 \text{ м}$

$$Q_I = 0$$

$$M_I = 0$$

II участок: $a \leq z \leq 10a = 1,1 \text{ м}$

$$Q_2 = q(z - a) - P$$

$$M_2 = -0,5q(z - a)^2 + P(z - a)$$

Тогда на границах участка

$$Q_{2(z=a)} = -10 \text{ кН}$$

$$Q_{2(z=10a)} = -4,06 \text{ кН}$$

$$M_{2(z=a)} = 0$$

$$M_{2(z=10a)} = 6,96 \text{ кНм}$$

Значение момента в опасном сечении

$M_{max} = 6,96 \text{ кНм}$ - по этому значению изгибающего момента ведется расчет на прочность.

Условие прочности

$$\sigma_{max} = \frac{|M_{max}|}{W_x} \leq [\sigma] = 8 \text{ МПа},$$

$$\Rightarrow W_x \geq \frac{|M_{max}|}{[\sigma]} = 869,96 \text{ см}^3$$

Подбор круглого сечения

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32}$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 W_x}{\pi}} = 0,207 \text{ м} = 20,7 \text{ см}$$

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = 336,54 \text{ см}^2$$

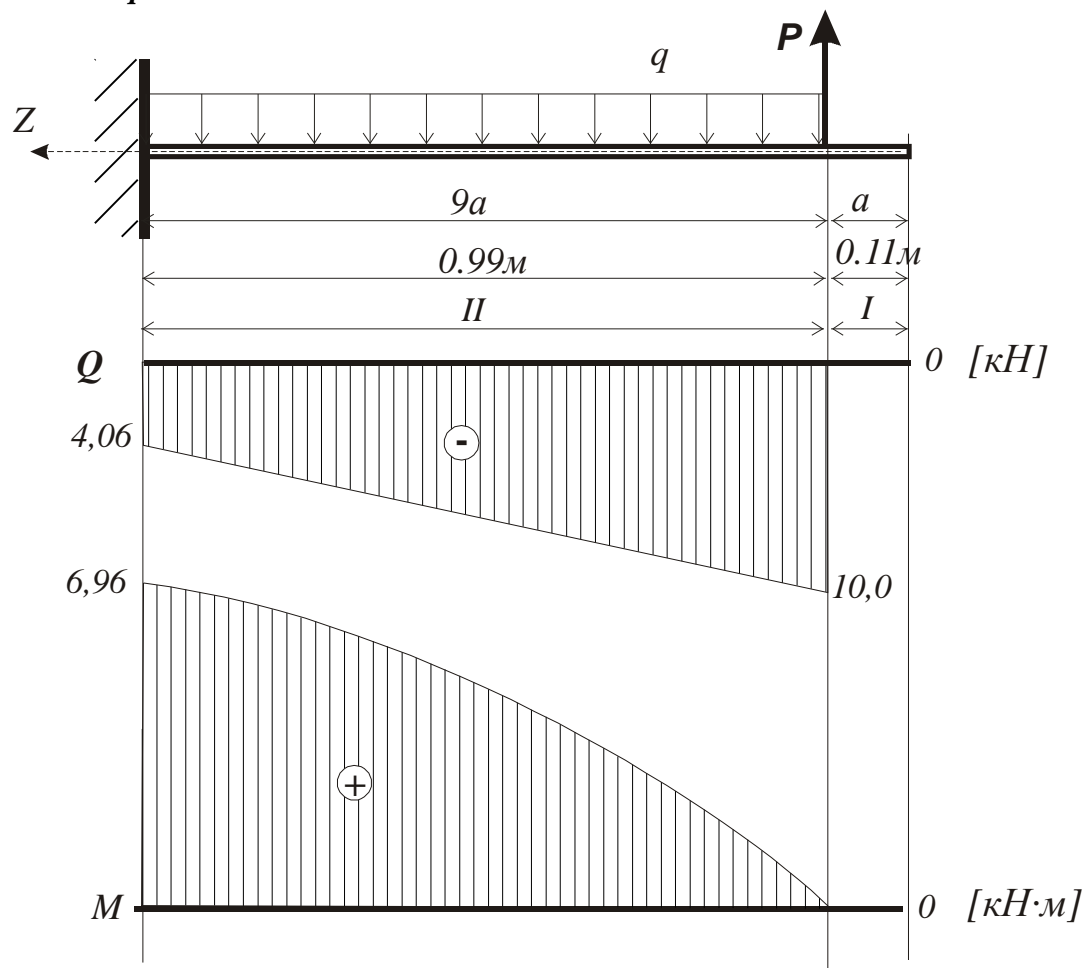


Схема б

Определим вертикальные реакции в шарнирных опорах R_A , R_B . Уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum M_B^i = 0 \\ \sum M_A^i = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -R_A \cdot 10a - P \cdot a + q \cdot 9a \cdot 5,5a - M = 0 \\ -R_B \cdot 10a + P \cdot 11a + q \cdot 9a \cdot 4,5a + M = 0 \end{cases}$$

$$R_A = \frac{-P \cdot a + q \cdot 9a \cdot 5,5a - M}{10a} = 15,32 \text{ кН};$$

$$R_B = \frac{P \cdot 11a + q \cdot 9a \cdot 4,5a + M}{10a} = 27,08 \text{ кН};$$

проверка

$$\sum Y_i = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A + R_B - q \cdot 9a - P = 0;$$

проверка сошлась

Определим поперечные силы и изгибающие моменты на каждом участке нагружения, пользуясь методом сечений.

I участок: $0 \leq z \leq a = 0,6 \text{ м}$ (справа)

$$Q_I = P$$

$$M_I = -Pz$$

Тогда на границах участка

$$Q_{I(z=0)} = 10 \text{ кН}$$

$$Q_{I(z=a)} = 10 \text{ кН}$$

$$M_{I(z=0)} = 0$$

$$M_{I(z=a)} = -6,0 \text{ кНм}$$

II участок: $a \leq z \leq 2a = 1,2 \text{ м}$

$$Q_2 = P - R_B$$

$$M_2 = -Pz + R_B(z - a)$$

Тогда на границах участка

$$Q_{2(z=a)} = -17,08 \text{ кН}$$

$$Q_{2(z=2a)} = -17,08 \text{ кН}$$

$$M_{2(z=a)} = -6,0 \text{ кНм}$$

$$M_{2(z=2a)} = 4,25 \text{ кНм}$$

IV участок: $0 \leq z \leq a = 0,6 \text{ м}$ (слева)

$$Q_4 = R_A - qz$$

$$M_4 = R_A z - 0,5qz^2$$

Тогда на границах участка

$$Q_{4(z=0)} = 15,32 \text{ кН}$$

$$Q_{4(z=a)} = 11,72 \text{ кН}$$

$$M_{4(z=0)} = 0$$

$$M_{4(z=a)} = 8,11 \text{ кНм}$$

III участок: $a \leq z \leq 8a = 4,8 \text{ м}$

$$Q_3 = R_A - qz$$

$$M_3 = M + R_A z - 0,5qz^2$$

Тогда на границах участка

$$Q_{3(z=a)} = 11,72 \text{ кН}$$

$$Q_{3(z=8a)} = -17,08 \text{ кН}$$

$$M_{3(z=a)} = 17,11 \text{ кНм}$$

$$M_{3(z=8a)} = 4,25 \text{ кНм}$$

Максимальное значение момента приходится на сечение, в котором поперечная сила обращается в ноль. Определим координату сечения:

$$Q_3 = R_A - qz = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{R_A}{q} = 4,25a = 2,55 \text{ м}$$

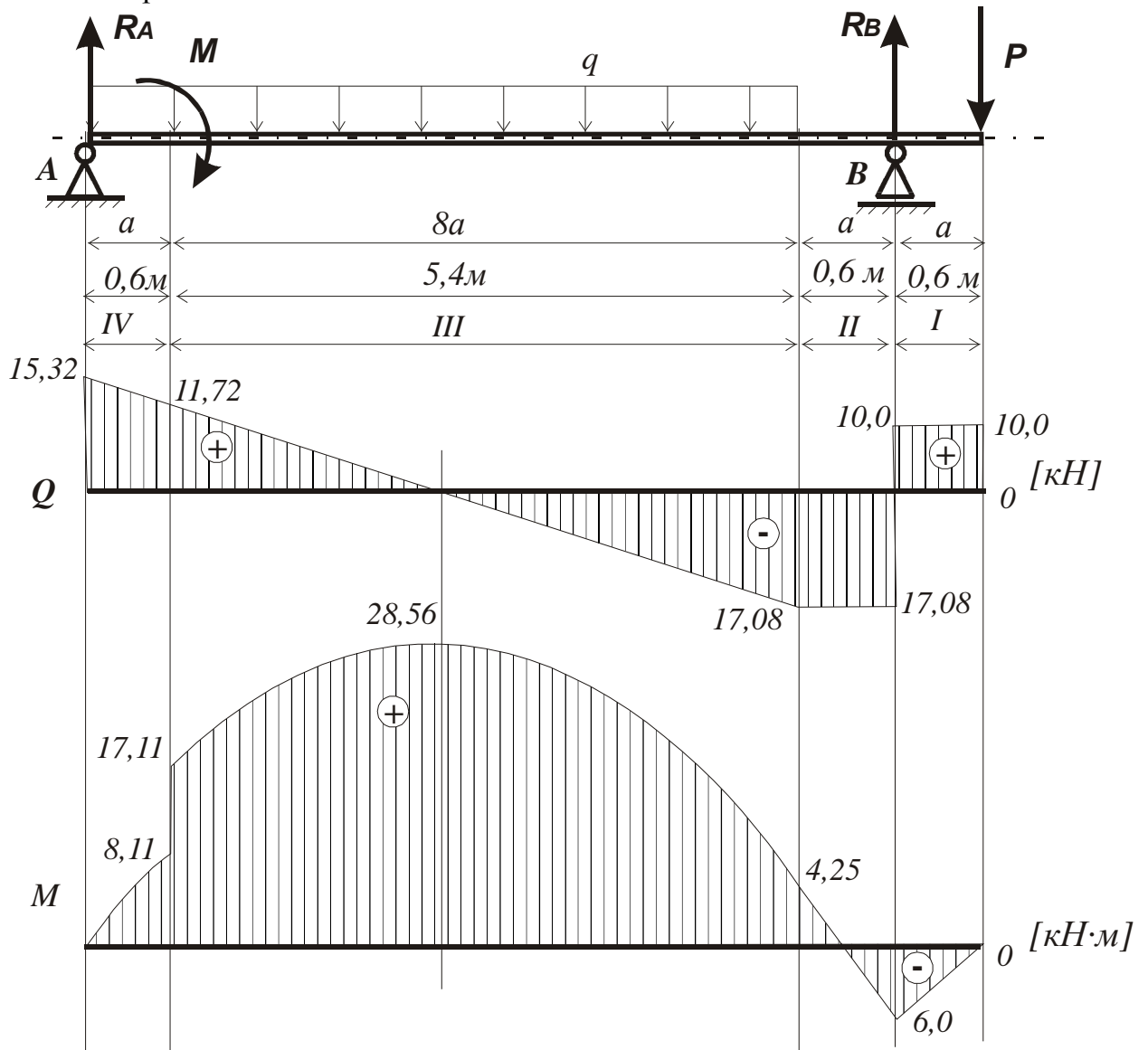
Тогда $M_{3(z=4,25a)} = 28,56 \text{ кНм}$

Опасным является сечение, где момент принимает наибольшее значение,

$$M_{\max} = 28,56 \text{ кНм}.$$

Так как в опасном сечении момент положительный, верхние волокна сжаты, нижние - растянуты.

Условие прочности



$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma] = 180 \text{ МПа},$$

$$\Rightarrow W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = 158,66 \text{ см}^3$$

Подбор двутаврового сечения

двутавр № 18а:

$$W_x=159 \text{ см}^3, F=25,4 \text{ см}^2, J_x=1430 \text{ см}^4, S_x=89,8 \text{ см}^3, h=180 \text{ мм}, b=100 \text{ мм}, s=5,1 \text{ мм}, t=8,3 \text{ мм}$$

$$s_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} = 179,61 \text{ МПа}$$

$$\text{Балка недогружена на } d\% = \left| \frac{[s] - s_{max}}{[s]} \right| \cdot 100\% = 0,21\% .$$

Задача №10

Для балки требуется:

1. найти изгибающий момент на левой опоре (в долях ql^2);
2. построить эпюры Q и M ;
3. построить эпюру прогибов, вычислив три ординаты в пролете и две на консоли.

Исходные данные:

схема VII;

$$a=0,9; b=0,2.$$

Решение

Уравнения равновесия для статически неопределимой балки:

$$\begin{cases} -R_A l - M_A - P \cdot 0,5l - 0,5q(b l)^2 = 0 \\ -R_B l + M_A - P \cdot 0,5l + q(b l) \cdot (0,5b l + l) = 0 \end{cases}$$

Система один раз статически неопределима: $s = 3 - 2 = 1$.

Раскроем статическую неопределимость, пользуясь методом сил.

В качестве эквивалентной системы выбираем шарнирно опертую статически определимую балку, нагруженную неизвестным моментом X_1 в сечении А на месте отброшенной связи – жесткой заделки. Условие эквивалентности – равенство нулю угла поворота в сечении А - запишем в виде уравнения метода сил для один раз статически неопределимой системы:

$d_{11} X_1 + D_{1P} = 0$. d_{11} - угол поворота сечения А, вызванный единичным моментом, приложенным в сечении А в направлении X_1 . D_{1P} - угол поворота сечения А от действия внешней нагрузки. Определим перемещения сечения А, пользуясь методом Верещагина:

$$d_{11} = \frac{1}{EJ_x} (\overline{M} \times \overline{M});$$

$$D_{1P} = \frac{1}{EJ_x} (M_P \times \overline{M} + M_q \times \overline{M}).$$

Умножим эпюру от действия единичного момента \overline{M} саму на себя:

$$d_{11} = \frac{1}{EJ_x} (\overline{M} \times \overline{M}) = \frac{1}{EJ_x} (W_0 \overline{M}_0) = \frac{0,33l}{EJ_x}$$

$$W_0 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l = 0,5l; \quad \overline{M}_0 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

Умножим эпюры изгибающих моментов от действия внешних нагрузок на эпюру \bar{M} :

$$D_{IP} = \frac{I}{EJ_x} (M_P \times \bar{M} + M_q \times \bar{M}) = \frac{I}{EJ_x} (W_1 \times \bar{M}_1 + W_2 \times \bar{M}_2) = \frac{-0,05958 ql^3}{EJ_x}$$

$$W_1 = -\frac{I}{2} \cdot \frac{Pl}{4} \cdot l = -0,125 Pl^2; \quad \bar{M}_1 = \frac{l}{2}$$

$$W_2 = -\frac{I}{2} \cdot (0,5q(bl)^2) \cdot l = -0,01ql^3; \quad \bar{M}_2 = \frac{l}{3}$$

$$X_1 = -\frac{D_{IP}}{d_{11}} = 0,17875 ql^2, \quad M_A = 0,17875 ql^2$$

Из уравнений равновесия находим значения реакций:

$$R_A = -0,64875 ql, \quad R_B = -0,05125 ql.$$

Определим поперечные силы и изгибающие моменты на каждом участке нагружения, пользуясь методом сечений.

I участок: $0 \leq z \leq 0,5l$ (слева)

$$Q_1 = R_A$$

$$M_1 = R_A z + M_A$$

Тогда на границах участка

$$Q_{1(z=0)} = -0,6488 ql$$

$$Q_{1(z=0,5l)} = -0,6488 ql$$

$$M_{1(z=0)} = 0,1788 ql^2$$

$$M_{1(z=0,5l)} = -0,1456 ql^2$$

II участок: $0,5l \leq z \leq l$ (слева)

$$Q_2 = R_A + P$$

$$M_2 = R_A z + M_A + P(z - 0,5l)$$

Тогда на границах участка

$$Q_{2(z=0,5l)} = 0,2513 ql$$

$$Q_{2(z=l)} = 0,2513 ql$$

$$M_{2(z=0,5l)} = -0,1456 ql^2$$

$$M_{2(z=l)} = -0,02 ql^2$$

III участок: $0 \leq z \leq bl$ (справа)

$$Q_3 = qz$$

$$M_3 = -0,5qz^2$$

Тогда на границах участка

$$Q_{3(z=0)} = 0$$

$$Q_{3(z=bl)} = 0,2ql$$

$$M_{3(z=0)} = 0$$

$$M_{3(z=bl)} = -0,02 ql^2$$

Выполним деформационную проверку – убедимся, что угол поворота в сечении A равен нулю. Перемещение определяем, перемножая эпюру изгибающего момента M для статически неопределимой балки и эпюру от действия единичного момента \bar{M} , пользуясь формулами для перемножения прямолинейных трапеций

$$(\bar{M} \times M_{uz}) = \frac{l}{6} (2ac + 2bd + ad + bc).$$

$$q_A = \frac{1}{EJ_x} (M \times \bar{M}) = \frac{1}{EJ_x} \left(\frac{0,5l}{6} (2a_1c_1 + 2b_1d_1 + a_1d_1 + b_1c_1) + \right. \\ \left. + \frac{0,5l}{6} (2a_2c_2 + 2b_2d_2 + a_2d_2 + b_2c_2) \right) = \frac{0,012969 - 0,012969}{EJ_x} ql^3 = 0$$

$$\text{где } c_1 = l; d_1 = 0,5; c_2 = 0,5; d_2 = 0;$$

$$a_1 = 0,1788ql^2; \quad b_1 = -0,1456ql^2;$$

$$a_2 = -0,1456ql^2; \quad b_2 = -0,02ql^2$$

Определим прогибы поперечных сечений балки методом начальных параметров:

$$EJ_x y = EJ_x y_0 + EJ_x q_0 z + M_A \frac{z^2}{2} + R_A \frac{z^3}{6} + P \frac{(z-0,5l)^3}{6} \Big|_{z>0,5l} + R_B \frac{(z-l)^3}{6} \Big|_{z>l} - \\ - q \frac{(z-l)^4}{24} \Big|_{z>l},$$

$$\text{причем } y_0 = 0, \quad q_0 = 0.$$

Тогда прогибы в сечениях балки (ось z слева направо):

$$y_{A(z=0)} = 0;$$

$$y_{(z=0,25l)} = \frac{0,0039ql^4}{EJ_x};$$

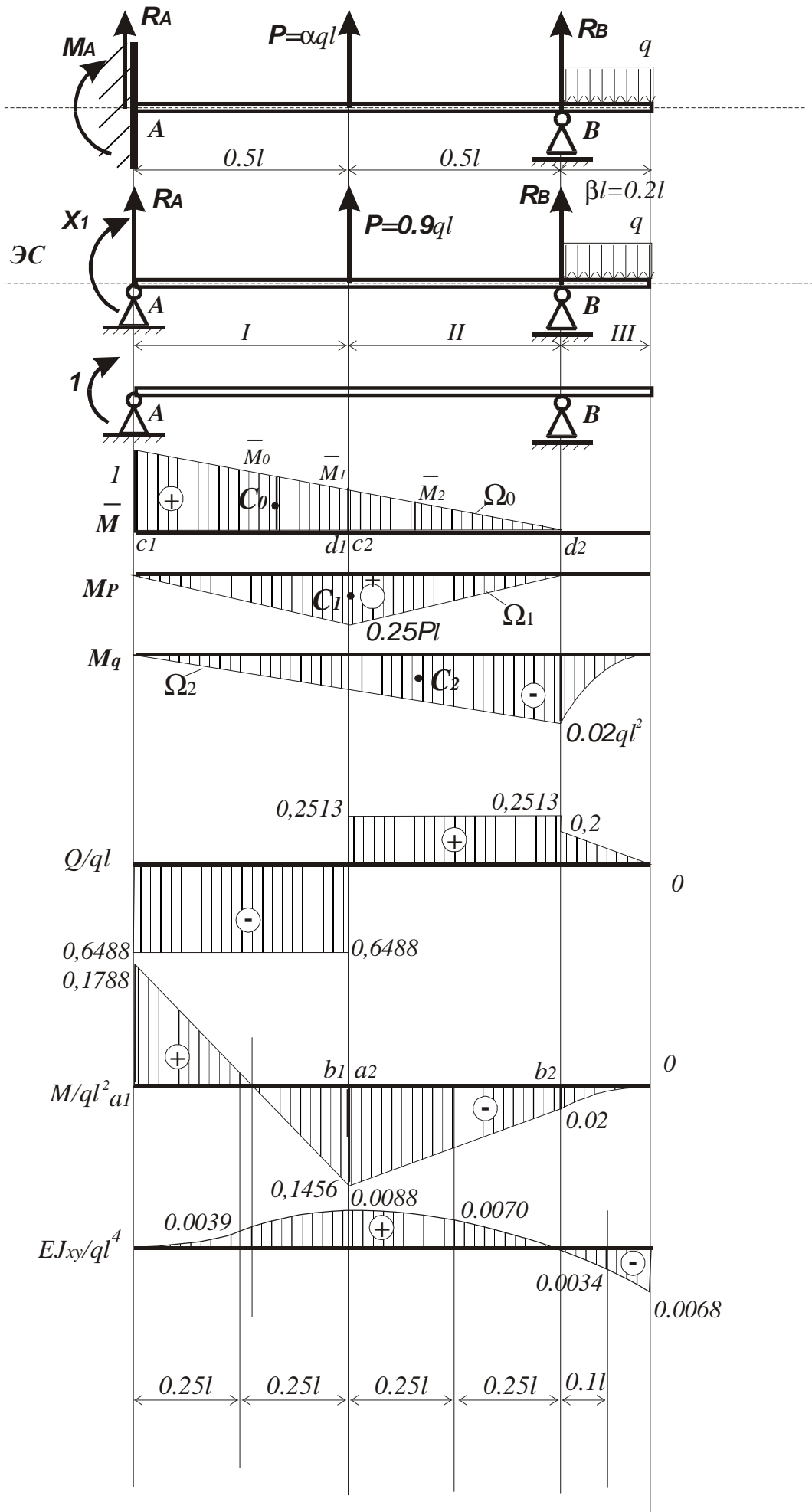
$$y_{(z=0,5l)} = \frac{0,0088ql^4}{EJ_x};$$

$$y_{(z=0,75l)} = \frac{0,0070ql^4}{EJ_x};$$

$$y_{B(z=l)} = 0;$$

$$y_{(z=(l+0,5b)l)} = \frac{-0,0034ql^4}{EJ_x};$$

$$y_{(z=(l+b)l)} = \frac{-0,0068ql^4}{EJ_x}$$



Задача №6

Жесткий брус прикреплен к шарнирно-неподвижной опоре и к двум пружинам с одинаковым средним диаметром витков D и с одинаковым диаметром проволоки d . Пружина 1 имеет m витков, пружина 2 – n витков. Требуется:

1. найти усилия и напряжения в обеих пружинах;
2. найти осадки обеих пружин;
3. установить при каком отношении m/n усилия в обеих пружинах равны между собой;
4. найти усилия, напряжения и осадки при найденном отношении m/n и заданной величине m (или n).

Исходные данные:

схема VI

$$D=13 \text{ см}; d=1,3 \text{ см}; m=13; n=6; P=60 \text{ Н}, G=8 \cdot 10^4 \text{ МПа}.$$

Решение

1. Уравнения равновесия для статически неопределимой системы:

$$\begin{cases} \sum X_i = 0 & \Rightarrow X_A = 0 \\ \sum Y_i = 0 & \Rightarrow Y_A + N_1 - N_2 - P = 0 \\ \sum M_A^i = 0 & \Rightarrow N_1 a + N_2 a - P a = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow N_1 + N_2 - P = 0 \quad (1)$$

Система один раз статически неопределима: $s = 4 - 3 = 1$.

Рассмотрим схему деформации системы.

$$D_{ABB_1} \sim D_{ACC_1} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BB_1}{CC_1}$$

$$CC_1 = l_2; \quad BB_1 = l_1;$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a} = \frac{l_1}{l_2},$$

уравнение совместности деформаций:

$$l_1 = l_2$$

Продольные деформации винтовых пружин или их осадки равны:

$$l_1 = \frac{8N_1 D^3 m}{G d^4};$$

$$l_2 = \frac{8N_2 D^3 n}{G d^4}.$$

Из уравнения совместности деформаций получим

$$N_1 m = N_2 n \Rightarrow N_1 = \frac{n}{m} N_2. \quad (2)$$

Разрешая систему уравнений (1), (2) находим усилия в стержнях системы:

$$N_1 = \frac{Pn}{m+n} = 18,95 \text{ Н}$$

$$N_2 = \frac{Pm}{m+n} = 41,05 \text{ Н}$$

Максимальные напряжения в сечениях проволоки пружин

$$t_1 = k \frac{8N_1 D}{pd^3} = 3,25 \text{ МПа}$$

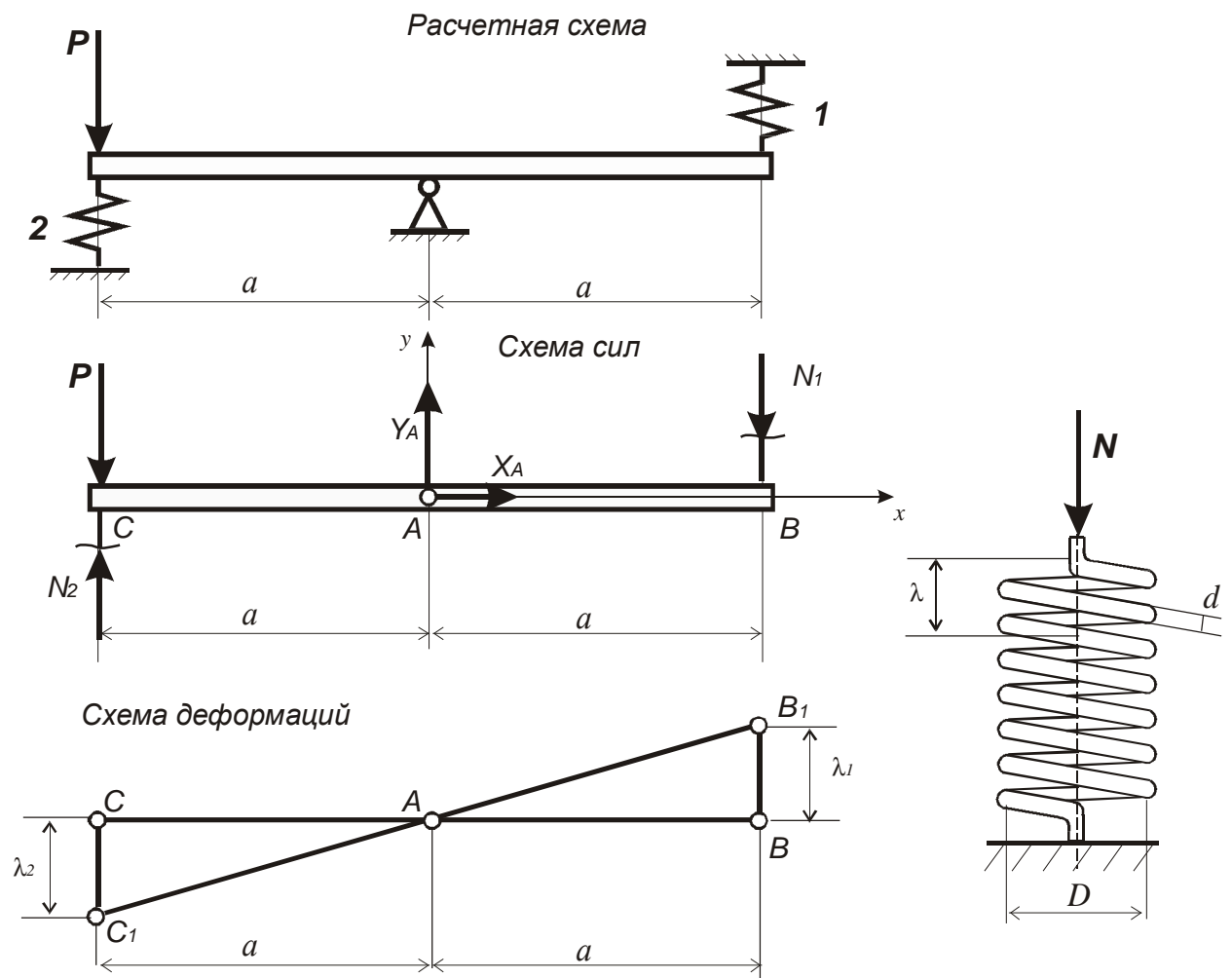
$$t_2 = k \frac{8N_2 D}{pd^3} = 7,04 \text{ МПа}$$

$$k = \frac{\frac{D}{d} + 0,25}{\frac{D}{d} - 1} = 1,139 - \text{поправочный коэффициент}$$

Осадки пружин

$$l_1 = \frac{8N_1 D^3 m}{G d^4} = 0,189 \text{ см}$$

$$l_2 = \frac{8N_2 D^3 n}{G d^4} = 0,189 \text{ см}$$



Установим, при каком отношении витков m/n усилия в пружинах равны между собой

пусть $N_1 = N_2 = N \Rightarrow$

$$2N - P = 0 \quad (1')$$

$$Nm - Nn = 0 \quad (2')$$

Следовательно, при

$$n = 6, \quad m = n = 6,$$

$$N_1 = N_2 = \frac{P}{2} = 30 \text{ Н}$$

$$t_1 = t_2 = k \frac{8PD}{3pd^3} = 5,15 \text{ МПа}$$

$$I_1 = I_2 = \frac{8PD^3n}{3Gd^4} = 0,138 \text{ см}$$

Задача №13

Чугунный короткий стержень сжимается продольной силой P , приложенной в точке A . Требуется:

1. вычислить наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжения в поперечном сечении, выразив эти напряжения через P и размеры сечения;
2. найти допускаемую нагрузку P при заданных размерах сечения и допускаемых напряжениях для чугуна на сжатие и на растяжение.

Исходные данные:

схема VII;

$a=3 \text{ см}; b=4 \text{ см}; [S]_c=130 \text{ МПа}; [S]_p=29 \text{ МПа}.$

Решение

Определим положение центра тяжести сечения.

Сечение имеет ось симметрии Y_c . Ординату центра тяжести определим относительно оси X .

Выразим площадь поперечного сечения через параметры a и b . Сечение разобьем на три части – два треугольника и прямоугольник с центрами тяжести в точках C_1, C_2, C_3 :

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2b + b \cdot 2b + \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2b = 2ab + 2b^2 = 56 \text{ см}^2.$$

Статический момент площади сечения относительно оси X :

$$S_X = S_1 + S_2 + S_3 = F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3 = ab \cdot \frac{2b}{3} + 2b^2 \cdot b + ab \cdot \frac{2b}{3} = \frac{4}{3} ab^2 + 2b^3 = 192 \text{ см}^3$$

Ордината центра тяжести C может быть определена по формуле

$$y_C = \frac{S_X}{F} = \frac{b \left(\frac{2}{3} a + b \right)}{(a+b)} = 3,43 \text{ см}.$$

Главные центральные оси инерции сечения - оси X_c, Y_c

Вычислим главные центральные моменты инерции сечения.

Главный центральный момент инерции сечения равен сумме моментов инерции частей сечения (m_i, n_i – расстояния между центральными осями частей и центральной осью сечения)

$$\begin{aligned} J_X &= J_{X_1}^1 + m_1^2 F_1 + J_{X_2}^2 + m_2^2 F_2 + J_{X_3}^3 + m_3^2 F_3 = \\ &= \frac{a(2b)^3}{36} + m_1^2 \cdot ab + \frac{b \cdot (2b)^3}{12} + m_2^2 \cdot 2b^2 + \frac{a(2b)^3}{36} + m_3^2 \cdot ab = 280,38 \text{ см}^4 \end{aligned}$$

$$J_Y = J_{Y_1}^1 + n_1^2 F_1 + J_{Y_2}^2 + n_2^2 F_2 + J_{Y_3}^3 + n_3^2 F_3 =$$

$$= \frac{2b \cdot a^3}{36} + n_1^2 \cdot ab + \frac{2b \cdot b^3}{12} + n_2^2 \cdot 2b^2 + \frac{2b \cdot a^3}{36} + n_3^2 \cdot ab = 270,67 \text{ см}^4$$

$$m_1 = y_C - y_1 = y_C - \frac{2b}{3} = 0,76 \text{ см}$$

$$m_2 = y_2 - y_C = b - y_C = 0,57 \text{ см}$$

$$m_3 = y_C - y_3 = y_C - \frac{2b}{3} = 0,76 \text{ см}$$

$$n_1 = \frac{b}{2} + \frac{a}{3} = 3 \text{ см}$$

$$n_2 = 0$$

$$n_3 = \frac{b}{2} + \frac{a}{3} = 3 \text{ см}$$

Квадраты главных радиусов инерции

$$i_x^2 = \frac{J_{xc}}{F} = 5,01 \text{ см}^2 \quad i_y^2 = \frac{J_{yc}}{F} = 4,83 \text{ см}^2$$

Определим положение нулевой линии сечения.

Координаты точки приложения силы P

$$x_P = x_A = 0 \quad y_P = y_A = -y_C = -3,43 \text{ см}$$

Нулевая линия параллельна оси Xc . Отрезок, отсекаемый нулевой линией на главной центральной оси инерции сечения Yc ,

$$y_n = -\frac{i_x^2}{y_P} = 1,25 \text{ см}$$

Наибольшие по величине напряжения сжатия будут на нижней границе сечения ($y = -y_C$), наибольшие по величине напряжения растяжения будут на верхней границе сечения ($y = 2b - y_C$).

$$S = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{x_P x}{i_y^2} + \frac{y_P y}{i_x^2} \right).$$

Тогда наибольшие сжимающие напряжения равны

$$S_{max}^c = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_P \cdot (-y_C)}{i_x^2} \right) = -749,22P \text{ 1/м}^2$$

Тогда наибольшие растягивающие напряжения равны

$$S_{max}^p = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_P \cdot (2b - y_C)}{i_x^2} \right) = 392,08P \text{ 1/м}^2$$

Определим допускаемую нагрузку.

Условие прочности на сжатие:

$$S_{max}^c \leq [S]_c = 130 \text{ МПа}$$

Условие прочности на растяжение:

$$S_{max}^p \leq [S]_p = 29 \text{ МПа}$$

Тогда

$$[P]_c \leq 173,51 \text{ кН} \quad [P]_p \leq 73,96 \text{ кН}$$

Принимаем $[P] = 73,96 \text{ кН}$

Решение

1. Определение моментов, приложенных к шкивам.

Момент, передаваемый передачей 1:

$$M_1 = \frac{30N}{p n} = 1074,30 \text{ Н м.}$$

Моменты, передаваемые передачами 2 и 3:

$$M_2 = \frac{30 \cdot 0,5N}{p n} = 537,15 \text{ Н м.}$$

2. Построение эпюры крутящих моментов M_k .

1 участок: $M_{k1} = 0$,

2 участок: $M_{k2} = M_1 = 1074,30 \text{ Н м}$,

3 участок: $M_{k3} = M_1 - M_2 = 537,15 \text{ Н м}$.

3. Усилия, действующие на шкивы.

Окружное усилие передачи 1:

$$t_1 = \frac{2M_1}{D_1} = 2387,32 \text{ Н,}$$

Окружное усилие передач 2 и 3:

$$t_2 = \frac{2M_2}{D_2} = 1342,87 \text{ Н,}$$

4. Давления на вал.

$$3t_1 = 7161,97 \text{ Н,}$$

$$3t_2 = 4028,61 \text{ Н.}$$

5. Силы, изгибающие вал в горизонтальной и вертикальной плоскостях.

Вертикальная и горизонтальная составляющие усилий, действующих на вал со стороны первой передачи:

$$P_{1y} = 3t_1 \sin \alpha_1 = 7161,97 \text{ Н,}$$

$$P_{1x} = 3t_1 \cos \alpha_1 = 0,$$

Вертикальная и горизонтальная составляющие усилий, действующих на вал со стороны второй и третьей передач:

$$P_{2y} = 3t_2 \sin \alpha_2 = 3967,41 \text{ Н,}$$

$$P_{2x} = 3t_2 \cos \alpha_2 = 699,56 \text{ Н,}$$

6. Построение эпюр изгибающих моментов от вертикальных и горизонтальных сил.

Построение эпюры изгибающего момента M_x :

$$\begin{cases} \sum m_B(P_{iy}) = 0, \\ \sum m_A(P_{iy}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y_A(b+c) - P_{1y}(c) + P_{2y}(0,5a) + P_{2y}(a) = 0, \\ Y_B(b+c) - P_{1y}(b) - P_{2y}(b+c+0,5a) - P_{2y}(b+c+a) = 0 \end{cases}$$

$$Y_A = 1393,27 \text{ Н,}$$

$$Y_B = 13703,51 \text{ Н.}$$

Проверка:

$$\sum P_{iy} = 0 \Rightarrow -P_{1y} - 2P_{2y} + Y_A + Y_B = 0$$

Величины изгибающего момента M_x в характерных сечениях:

$$M_{x1} = 0,$$

$$\begin{aligned}
M_{x2} &= M_{x3} = Y_A(b) = 2647,22 \text{ Н м}, \\
M_{x4} &= M_{x5} = Y_A(b+c) - P_{ly}(c) = -7736,44 \text{ Н м}, \\
M_{x6} &= M_{x7} = -P_{2y}(0,5a) = -2578,81 \text{ Н м}, \\
M_{x8} &= 0.
\end{aligned}$$

Построение эпюры изгибающего момента M_y :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} S m_B(P_{ix}) = 0, \\ S m_A(P_{ix}) = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} X_A(b+c) + P_{lx}(c) + P_{2x}(0,5a) + P_{2x}(a) = 0, \\ X_B(b+c) + P_{lx}(b) - P_{2x}(b+c+0,5a) - P_{2x}(b+c+a) = 0 \end{cases} \\
X_A &= -368,69 \text{ Н}, \\
X_B &= 1767,81 \text{ Н}.
\end{aligned}$$

Проверка:

$$S P_{ix} = 0 \Rightarrow P_{lx} - 2P_{2x} + X_A + X_B = 0$$

Значения изгибающего момента M_y в характерных сечениях:

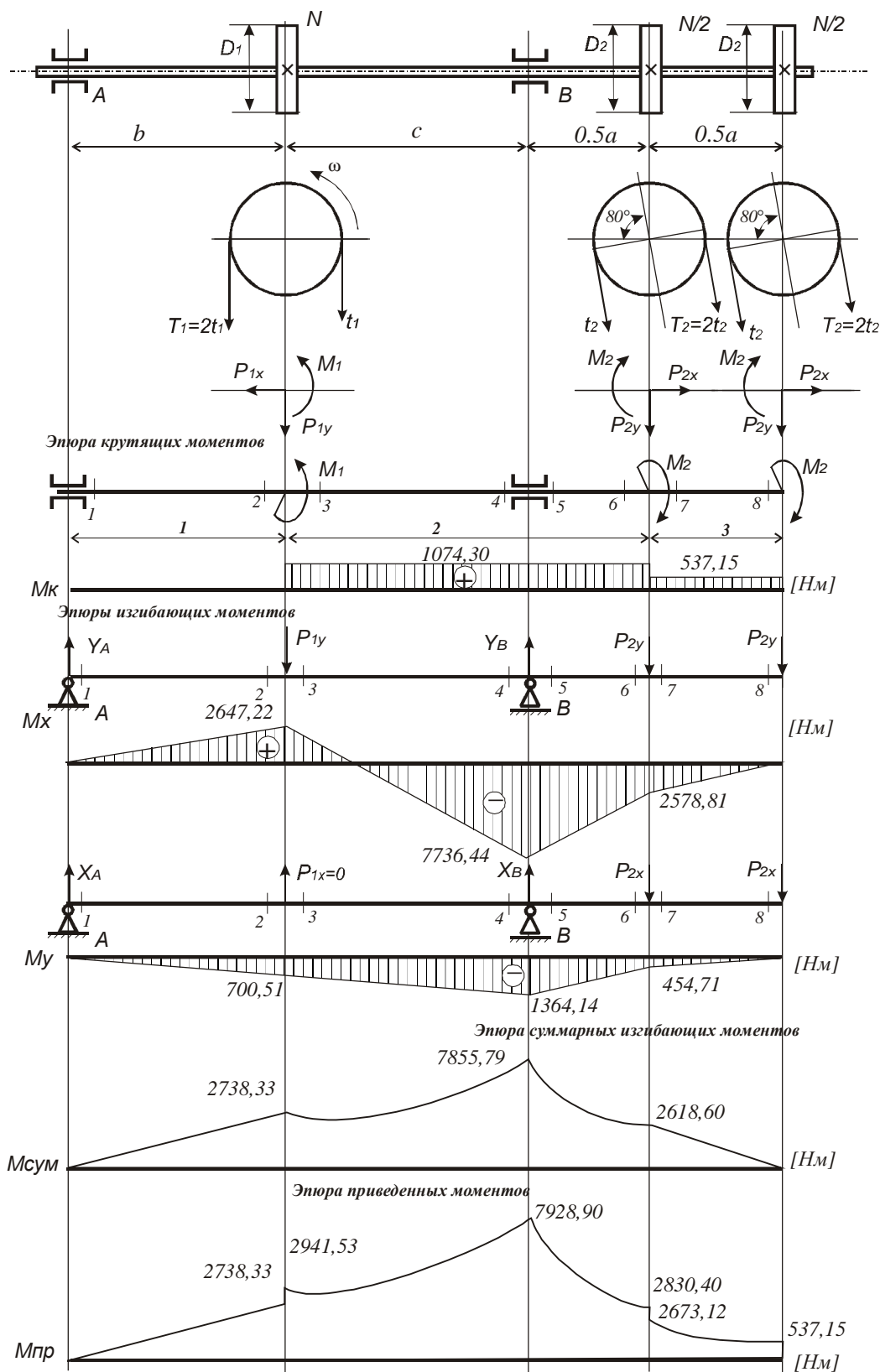
$$\begin{aligned}
M_{y1} &= 0, \\
M_{y2} &= M_{y3} = X_A(b) = -700,51 \text{ Н м}, \\
M_{y4} &= M_{y5} = P_{lx}(c) + X_A(b+c) = -1364,14 \text{ Н м}, \\
M_{y6} &= M_{y7} = -P_{2x}(0,5a) = -454,71 \text{ Н м}, \\
M_{y8} &= 0.
\end{aligned}$$

Построение эпюры суммарного изгибающего момента.

$$\begin{aligned}
M_{\text{сум}} &= \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \\
M_{\text{сум}}^1 &= 0, \\
M_{\text{сум}}^2 &= M_{\text{сум}}^3 = 2738,33 \text{ Н м}, \\
M_{\text{сум}}^4 &= M_{\text{сум}}^5 = 7855,79 \text{ Н м}, \\
M_{\text{сум}}^6 &= M_{\text{сум}}^7 = 2618,60 \text{ Н м}, \\
M_{\text{сум}}^8 &= 0.
\end{aligned}$$

Построение эпюры приведенных моментов.

$$\begin{aligned}
M_{\text{пр}} &= \sqrt{M_{\text{сум}}^2 + M_{\kappa}^2} \\
M_{\text{пр}}^1 &= 0, \\
M_{\text{пр}}^2 &= 2738,33 \text{ Н м}, \\
M_{\text{пр}}^3 &= 2941,53 \text{ Н м}, \\
M_{\text{пр}}^4 &= M_{\text{пр}}^5 = 7929,90 \text{ Н м}, \\
M_{\text{пр}}^6 &= 2830,40 \text{ Н м}, \\
M_{\text{пр}}^7 &= 2673,12 \text{ Н м}, \\
M_{\text{пр}}^8 &= 537,15 \text{ Н м}.
\end{aligned}$$



Определение диаметра вала.

Опасным является сечение, где приведенный момент достигает максимального значения.

Условие прочности вала при использовании теории наибольших касательных напряжений (третьей теории прочности) имеет вид:

$$s_{np} = \frac{M_{np}^{max}}{W_x} \leq [s] = 70 \text{ МПа},$$

$$\text{где } W_x = \frac{p d^3}{32} \approx 0,1 d^3$$

тогда диаметр вала в опасном сечении

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{np}^{max}}{0,1[s]}} = \sqrt[3]{\frac{M_{np}^4}{0,1[s]}} = 0,1049 \text{ м.}$$

Принимаем диаметр равным:

$$d = 110 \text{ мм.}$$

Задача №22

В опасном сечении вала с диаметром d действует крутящий момент $M_{кр}$ и изгибающий момент $M_{изг}$. Вал сделан из углеродистой стали (предел прочности которой равен S_b , а предел текучести S_m) и не имеет резких переходов, выточек, канавок; поверхность его чисто обработана резцом.

Определить коэффициент запаса прочности в опасном сечении вала, приняв нормальные напряжения изгиба изменяющимися по симметричному циклу, а касательные напряжения кручения - по пульсирующему циклу.

Коэффициенты концентрации напряжений и масштабные коэффициенты можно считать соответственно одинаковыми для нормальных и касательных напряжений.

Исходные данные:

$$d=40 \text{ мм}; M_{кр}=290 \text{ Н·м}; M_{изг}=300 \text{ Н·м}; S_b=590 \text{ МПа}; S_m=280 \text{ МПа}.$$

Решение

Моменты сопротивления опасного сечения:

при изгибе

$$W_x = \frac{p d^3}{32} = 6,283 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$$

при кручении

$$W_p = \frac{p d^3}{16} = 12,566 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$$

Максимальные напряжения:

при изгибе

$$s_{max} = \frac{M_{изг}}{W_x} = 47,75 \cdot 10^6 \text{ Па} = 47,75 \text{ МПа};$$

при кручении

$$t_{max} = \frac{M_{кр}}{W_p} = 23,08 \cdot 10^6 \text{ Па} = 23,08 \text{ МПа}.$$

Параметры циклов изменения нормальных и касательных напряжений:
для симметричного цикла

$$s_a = s_{\max} = 47,75 \text{ МПа}; \quad s_m = 0;$$

для пульсирующего цикла

$$t_a = t_m = 0,5 t_{\max} = 11,54 \text{ МПа}.$$

Пределы выносливости материала:

$$s_{-1} = (0,55 - 0,0001 \cdot s_B) \cdot s_B = 289,69 \text{ МПа};$$

$$t_{-1} = 0,6 \cdot s_{-1} = 173,81 \text{ МПа};$$

Коэффициенты, характеризующие чувствительность материала к асимметрии цикла:

$$y_s = 0,02 + 0,0002 \cdot s_B = 0,138;$$

$$y_t = 0,5 \cdot y_s = 0,069;$$

Эффективные коэффициенты концентрации напряжений при изгибе и кручении:

$$K_s = K_t = 1,2 + 0,2 \frac{s_B - 40}{110} = 2,20;$$

Масштабные коэффициенты:

$$K_{ds} = K_{dt} = 1,2 + 0,1(d - 3) = 1,30; \quad \text{здесь } d=4,0 \text{ см}$$

Коэффициенты чистоты обработки по условию задачи равны:

$$K_{FS} = K_{Ft} = 1.$$

Коэффициент упрочнения из условия задачи равен:

$$K_v = 1.$$

Коэффициенты снижения предела выносливости детали при изгибе и кручении:

$$K_{s\text{д}} = K_{t\text{д}} = \left(\frac{K_s}{K_{ds}} + \frac{1}{K_{Fs}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{K_v} = 1,692;$$

Коэффициент запаса прочности по нормальным напряжениям:

$$n_s = \frac{s_{-1}}{K_{s\text{д}} s_a + y_s s_m} = 3,585;$$

Коэффициент запаса прочности по касательным напряжениям:

$$n_t = \frac{t_{-1}}{K_{t\text{д}} t_a + y_t t_m} = 8,552;$$

Общий коэффициент запаса прочности при действии нормальных и касательных напряжений

$$n = \frac{n_s n_t}{\sqrt{n_s^2 + n_t^2}} = 3,306.$$